

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală-9 februarie 2013

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
Barem de corectare clasa IX

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $7x^2 - 8x + 1 = 0$.

b) $7|x|^2 - 8|x| + 1 = 0$, unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real x .

c) $7[x]^2 - 8[x] + 1 = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Soluție :

a) $\Delta = 36$1p

$x_1 = 1$1p

$x_2 = \frac{1}{7}$1p

b) Folosind punctul a) obținem $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$1p

$|x| = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{7}$1p

c) Folosind punctul a) obținem $[x] = 1 \Rightarrow x \in [1, 2)$1p

$[x] = \frac{1}{7}$ fals.....1p

2. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, se cunosc termenii $a_m = n$ și $a_n = m$ unde $m \neq n$. Să se determine a_p .

Soluție:

$a_m = a_1 + (m - 1)r = n$1p

$a_n = a_1 + (n - 1)r = m$1p

Rezolvând sistemul format cu cele două relații se obține $r = -1$2p

$a_1 = m + n - 1$1p

Atunci $a_p = a_1 + (p - 1)r = m + n - 1 + (p - 1)(-1) = m + n - p$2p

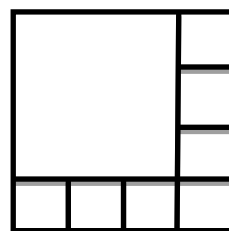
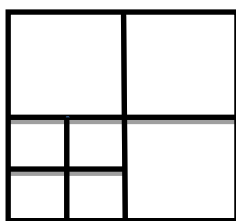
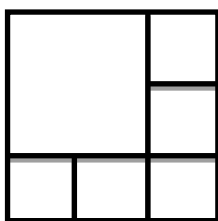
3. Se consideră un pătrat ABCD.

a) Descompuneți pătratul în 6, 7, respectiv 8 pătrate.

b) Demonstrați că pătratul se poate descompune în n pătrate, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$.

Soluție:

a)



Se acordă câte un punct pentru fiecare desen corect.....3p

b) Se presupune că un pătrat se poate descompune în k pătrate.....1p

Unul din cele k pătrate se împarte în 4 pătrate, obținându-se astfel $k+3$ pătrate.....2p

Este metoda inducției cu pasul 3, adică $P(k) \rightarrow P(k+3)$1p

4. În triunghiul echilateral ABC se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ astfel încât $AM=BN=CP$. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, respectiv CNP, să se arate că triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate.

Soluție:

Deoarece triunghiul este echilateral și $AM=BN=CP$ atunci $MB=NC=PA$ și putem nota cu k raportul $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k$ 1p

Atunci $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}$, $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + k\vec{r}_C}{1+k}$, $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_A}{1+k}$ 1p

Deci $\vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + k(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)}{1+k} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ 1p

G_1 este centrul de greutate al triunghiului AMP, deci $\vec{r}_{G_1} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_M + \vec{r}_P}{3}$

G_2 este centrul de greutate al triunghiului BMN, deci $\vec{r}_{G_2} = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_M + \vec{r}_N}{3}$

G_3 este centrul de greutate al triunghiului CNP, deci $\vec{r}_{G_3} = \frac{\vec{r}_C + \vec{r}_N + \vec{r}_P}{3}$ 1p

$\vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_3} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + 2(\vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P)}{3} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ 2p

Deci triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate.....1p